УДК 501
doi: 10.21685/2072-3040-2023-4-13

Научные исследования на кафедре «Высшая и прикладная математика» Пензенского государственного университета (1943–2023)

И. В. Бойков

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

boikov@pnzgu.ru

Для цитирования: Бойков И. В. Научные исследования на кафедре «Высшая и прикладная математика» Пензенского государственного университета (1943–2023) // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2023. № 4. С. 189–216. doi: 10.21685/2072-3040-2023-4-13

Scientific research at the sub-department of higher and applied mathematics of Penza State University (1943–2023)

I.V. Boykov

Penza State University, Penza, Russia

boikov@pnzgu.ru

For citation: Boykov I.V. Scientific research at the sub-department of higher and applied mathematics of Penza State University (1943–2023). *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2023;(4):189–216. (In Russ.). doi: 10.21685/2072-3040-2023-4-13

Введение

Кафедра «Высшая математика» (ВМ) Пензенского индустриального института (ее преемницей является кафедра «Высшая и прикладная математика» (ВиПМ) Пензенского государственного университета (ПГУ)) была одной из первых кафедр организованного 1 ноября 1943 г. Пензенского индустриального института.

В течение последующих 80 лет научная работа на кафедре проводилась в следующих направлениях:

– теория приближения (сплайны, поперечники, ε-энтропия);

– оптимальные методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов;

– приближенные методы решения сингулярных и гиперсингулярных интегральных уравнений, краевых задач Римана и Гильберта);

– приближенные методы решения прямых и обратных задач гравиразведки;

– приближенные методы решения обратных задач математической физики;

– методы идентификации параметров динамических систем;

– информатика: моделирование уравнений математической физики на искусственных нейронных сетях, сжатие информации, криптография;

– устойчивость решений систем дифференциальных и интегральных уравнений;

– математические модели экологии, экономики, медицины;

– прямые и обратные задачи электродинамики.

Остановимся на каждом из этих направлений в отдельности.

1. Теория приближения

Первые работы по теории приближения, выполненные на кафедре, были связаны с исследованиями д.ф.-м.н., проф. В. И. Левина [1–6][1] по асимптотическому разложению некоторых классов функций. В 1950 г. В. И. Левин построил асимптотическое разложение $\zeta(x)$ функции Римана (при $x = 1/2$) [1], обобщив тем самым результаты С. Рамануджана.

Следующий круг задач связан с исследованием аппроксимации функций асимптотическими полиномами – направлением, активно развиваемым к.ф.-м.н., доцентом И. И. Этерманом [7][2]. Под асимптотическими полиномами понимаются полиномы, не являющиеся полиномами наилучшего равномерного приближения, но асимптотически стремящиеся к ним при возрастании их степени. Построение асимптотических полиномов основано на замене узлов чебышевского альтернанса, которые в большинстве случаев практически невозможно точно вычислить, узлами полиномов Чебышева первого или второго рода. Результаты, полученные в области теории и приложений асимптотических полиномов, отражены в монографиях [8, 9][3]. Асимптотические полиномы в 60–80 гг. прошлого века получили достаточно широкое применение при решении интегральных и дифференциальных уравнений и при качественном исследовании динамических систем.

[1] Д.ф.-м.н., профессор В. И. Левин – выпускник Берлинского высшего технического училища, окончил аспирантуру в Кембриджском университете (ученик Г. Харди – одного из крупнейших математиков начала XX в.); в 1949–1951 гг. заведовал кафедрой «Высшая математика» Пензенского индустриального института. В этот период им были получены фундаментальные результаты по асимптотическому разложению некоторых классов функций; написаны монографии [2, 3]. В 1950 г. В. И. Левин построил асимптотическое разложение $\zeta(x)$ функции Римана (при $x = 1/2$) [1], обобщив тем самым результаты С. Рамануджана. Позднее он опубликовал работы [4, 5], посвященные жизни и творчеству С. Рамануджана. Биографический очерк о жизни и творчестве В. И. Левина опубликован в [6].

[2] К.ф.-м.н, доцент И. И. Этерман работал на кафедре Высшая и прикладная математика с 1956 по 1988 г., с 1956 по 1972 г. заведовал кафедрой (биографический очерк об И.И. Этермане опубликован в [7]).

[3] Автор монографии [9] к.ф.-м.н., доцент В. П. Грибкова в 60 г. прошлого столетия была аспиранткой кафедры ВМ Пензенского индустриального института.

В 1970-е гг. к.т.н., доцент кафедры ВМ А. Т. Ерохин разрабатывает методы аппроксимации одномерных и многомерных многоэкстремальных функций. Полученные А. Т. Ерохиным результаты нашли применение при аппроксимации и сжатии геофизических полей. Цикл статей, посвященных этому направлению, опубликован в книге [10].

Следующее направление в теории приближений, разрабатываемое на кафедре, связано с задачами, сформулированными выдающимся советским и российским математиком, членом-корреспондентом АН СССР и РАН К. И. Бабенко. В работе [11] К. И. Бабенко сформулировал ряд задач, которые он считал важнейшими в вычислительной математике. В их числе были задача о вычислении поперечников класса функций $Q_r(\Omega, M)$ и задача об асимптотике решений эллиптических уравнений. Эти задачи были решены И. В. Бойковым [12–15].

Напомним определение поперечника Колмогорова.

Определение 1 [16]. Пусть L^n – множество n-мерных линейных подпространств банахова пространства B. Выражение $d_n(X, B) = \inf\limits_{L^n} \sup\limits_{x\in X} \inf\limits_{u\in L^n} \| x - u \|$, где последний inf берется по всем подпространствам L^n размерности n, определяет n-поперечник Колмогорова.

Напомним определение класса функций $Q_r(\Omega, M)$.

Определение 2 [11]. Пусть $\Omega = [-1,1]^l$, $l = 1,2,\ldots$ Функция $\varphi(x_1 \ldots, x_l)$ принадлежит классу $Q_r(\Omega, M)$, если выполнены условия

$$\max_{x\in\Omega} | \partial^{|v|}\varphi(x_1,\ldots,x_l) / \partial x_1^{v_1} \cdots \partial x_l^{v_l} | \le M \quad \text{при } 0 \le |v| \le r,$$

$$| \partial^{|v|}\varphi(x_1,\ldots,x_l) / \partial x_1^{v_1} \cdots \partial x_l^{v_l} | \le M / (d(x,\Gamma))^{|v|-r}, \; x \in \Omega \setminus \partial\Omega \text{ при } r < |v| \le 2r+1,$$

где $x = (x_1,\ldots,x_l)$, $v = (v_1,\ldots,v_l)$, $v_i \ge 0$, $i = 1,2,\ldots,l$, $|v| = v_1 + \cdots + v_l$, $d(x,\Gamma)$ – расстояние от точки x до границы Γ области Ω, вычисляемое по формуле $d(x,\Gamma) = \min_{1\le i\le l} \min(|-1-x_i|, |1-x_i|)$.

Позднее И. В. Бойковым были введены классы функций $Q_{r,\gamma}(\Omega, M)$, $\bar{Q}_{r,\gamma}(\Omega, M)$, $Q_{r,\gamma,p}(\Omega, M)$ $(r = 1,2,\ldots, 1 \le p < \infty)$, $\bar{Q}_{r,\gamma,p}(\Omega, M)$ $(r = 1,2,\ldots, 1 \le p < \infty)$, $B_{r,\gamma}(\Omega, M)$, $\bar{B}_{r,\gamma}(\Omega, M)$, которые являются обобщениями класса функций $Q_r(\Omega, M)$.

Приведем определения классов функций $Q_{r,\gamma}(\Omega, M)$ и $B_{r,\gamma}(\Omega, M)$.

Определение 3 [13]. Пусть $\Omega = [-1,1]^l$, $l = 1,2,\ldots$ Функция $\varphi(x_1 \ldots, x_l)$ принадлежит классу $Q_{r,\gamma}(\Omega, M)$, если выполнены условия

$$\max_{x\in\Omega} | \partial^{|v|}\varphi(x) / \partial x_1^{v_1} \cdots \partial x_l^{v_l} | \le M \quad \text{при } 0 \le |v| \le r,$$

$$| \partial^{|v|}\varphi(x) / \partial x_1^{v_1} \cdots \partial x_l^{v_l} | \le M / (d(x,\Gamma))^{|v|-r-\zeta}, \; x \in \Omega \setminus \partial\Omega \text{ при } r < |v| \le s,$$

где $s = r + [\gamma] + 1$, $\gamma = [\gamma] + \mu$, $0 < \mu < 1$, $\zeta = 1 - \mu$ при γ нецелом, $s = r + \gamma, \zeta = 0$ при γ целом.

Определение 4 [13]. Пусть $\Omega = [-1,1]^l$, $l = 1,2,\ldots$, $r = 1,2,\ldots$, $0 < \gamma \leq 1$. Функция $\varphi(x_1,\ldots,x_l)$ принадлежит классу $B_{r,\gamma}(\Omega, M)$, если выполнены условия

$$\max_{x\in\Omega} |\partial^{|v|}\varphi(x_1,\ldots,x_l) / \partial x_1^{v_1} \cdots \partial x_l^{v_l}| \leq M^{|v|} |v|^{|v|} \text{ при } 0 \leq |v| \leq r,$$

$$\left|\frac{\partial^{|v|}\varphi(x_1,\ldots,x_l)}{\partial x_1^{v_1} \cdots \partial x_l^{v_l}}\right| \leq M^{|v|} |v|^{|v|} / (d(x,\Gamma))^{|v|-r-1+\gamma}, \; x \in \Omega \setminus \partial\Omega \text{ при } r < |v| \leq \infty.$$

К подобным классам функций, помимо решений эллиптических уравнений, принадлежат решения слабосингулярных, сингулярных и гиперсингулярных интегральных уравнений и ряда других уравнений математической физики. Кроме того, к ним принадлежат геофизические поля различной природы.

В работах [12, 13, 15] вычислены поперечники и построены оптимальные методы аппроксимации классов функций $Q_{r,\gamma}(\Omega, M), B_{r,\gamma}(\Omega, M)$ и их обобщений. В качестве аппарата приближения использованы локальные сплайны. В монографии [15] вычислена колмогоровская ε-энтропия компактов, определенных на множествах функций $Q_{r,\gamma}(\Omega, M), B_{r,\gamma}(\Omega, M)$.

Полученные результаты по оптимальным методам аппроксимации специальных классов функций были положены в основу построения оптимальных по точности методов вычисления сингулярных интегралов [17], решения слабосингулярных интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерра [18–20].

На II Международном конгрессе математиков, проходившем с 6 по 12 августа 1900 г., Д. Гильбертом был произнесен знаменитый доклад «Математические проблемы» [21], который во многом определил развитие математики в XX в. В докладе Д. Гильберта были сформулированы 23 проблемы, касающиеся всех областей математики: теории множеств (континиум-проблема), обоснования математики, геометрии, алгебры, алгебраической геометрии, теории чисел, математического анализа, дифференциальных уравнений и вариационного исчисления.

Среди сформулированных 23 проблем 13-я проблема звучала так: доказать, что уравнение 7-й степени $f^7 + xf^3 + yf^2 + zf + 1 = 0$ не разрешимо с помощью каких-либо непрерывных функций, зависящих только от двух аргументов.

Формулируя проблему, Д. Гильберт предполагал, что функция $f(x, y, z)$, являющаяся решением этого уравнения, не представима в виде суперпозиций даже непрерывных функций. Поэтому сенсационной была работа А. Н. Колмогорова [22], в которой он доказал, что всякая непрерывная функция n переменных представима в виде суперпозиции непрерывных функций трех переменных.

В 1957 г. В. И. Арнольд доказал [23], что всякая непрерывная функция трех переменных представима в виде суперпозиций непрерывных функций двух переменных: $f(x,y,z)=\sum_{i=0}^{9} f_i(\varphi_i(x,y),z),$ где все функции непрерывны. В том же 1957 г. А. Н. Колмогоров показал [24], что всякая непрерывная функция двух переменных представима суперпозициями непрерывных функций одной переменной и операцией сложения. Таким образом, А. Н. Колмогоров и В. И. Арнольд доказали несправедливость гипотезы Гильберта о том, что решение уравнения 7-й степени не представимо суперпозициями непрерывных функций двух переменных.

В это же время А. Н. Колмогоров отметил [25], что, по-видимому, Д. Гильберт был бы прав, если бы рассматривал представление аналитических функций многих переменных непрерывно дифференцируемыми функциями меньшего числа переменных. Это замечание А. Н. Колмогорова известно как гипотеза Колмогорова [25, с. 447]: «…существуют аналитические функции трех переменных, не представимые суперпозициями непрерывно дифференцируемых функций двух переменных, и аналитические функции двух переменных, не представимые суперпозициями непрерывно дифференцируемых функций одной переменной и сложения».

Эта задача частично была решена А. Г. Витушкиным [26]; см. также [27, с. 129]. Полное решение задачи дано И. В. Бойковым [28–30].

2. Приближенные методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов

Одним из центральных направлений в научной деятельности кафедры является построение и исследование квадратурных и кубатурных формул вычисления регулярных, сингулярных и гиперсингулярных интегралов в различных постановках и на различных классах функций.

Предварительно напомним определения сингулярных интегралов (СИ) и гиперсингулярных интегралов (ГИ).

Определение 5 [31]. Главным значением по Коши особого интеграла $\int_a^b \frac{f(\tau)}{\tau-c}d\tau,\ a<c<b,$ называется предел

$$\lim_{\eta\to 0}\left[\int_a^{c-\eta}\frac{f(\tau)}{\tau-c}d\tau+\int_{c+\eta}^{b}\frac{f(\tau)}{\tau-c}d\tau\right].$$

Приведем определение многомерных сингулярных интегралов. Через E_2 обозначим двумерное евклидово пространство, $t=(t_1,t_2),\tau=(\tau_1,\tau_2)$ – точки этого пространства,

$$r(t,\tau)=\left((t_1-\tau_1)^2+(t_2-\tau_2)^2\right)^{1/2},\ \ \theta=\left(\frac{t_1-\tau_1}{r(t,\tau)},\frac{t_2-\tau_2}{r(t,\tau)}\right).$$

Нетрудно видеть, что точка θ пробегает окружность радиуса 1 с центром в точке t.

Пусть $\bar{\Omega}$ – область в E_2.

Определение 6 [32]. Многомерный СИ

$$M\varphi = \int_{\bar{\Omega}} \frac{f(\theta, t, \tau)\varphi(\tau)}{r^2(t,\tau)} d\tau_1 d\tau_2, \quad t \in \Omega,$$

определяется формулой

$$M\varphi = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\bar{\Omega} \setminus S(t,\epsilon)} \frac{f(\theta, t, \tau)\varphi(\tau)}{r^2(t,\tau)} d\tau_1 d\tau_2, \quad t \in \Omega,$$

где $S(t,\epsilon)$ – круг радиуса ϵ с центром в точке t.

Вопросы существования многомерных СИ подробно исследованы в [32].

Вначале остановимся на вычислении СИ с фиксированными особенностями:

$$J\varphi = \int_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau)}{\tau} d\tau. \tag{1}$$

В качестве методов вычисления используются квадратурные формулы (к.ф.):

$$J\varphi = {\sum_{k=-N}^{N}}' \sum_{l=0}^{\rho} p_{kl} \varphi^{(l)}(t_k) + R_N(t_k, p_{kl}, \varphi), \tag{2}$$

где $-1 \le t_{-N} < \ldots < t_{-1} \le 0 \le t_1 < \ldots < t_N \le 1$; $\sum'$ означает суммирование по $k \ne 0$.

Построены асимптотически оптимальные и оптимальные по порядку квадратурные формулы вида (2) вычисления интегралов (1) на классах функций Гельдера и Соболева.

Остановимся на построении оптимальных квадратурных формул.

Сингулярный интеграл (1) вычисляется по к.ф. (2) при $\rho = 0$.

Квадратурная формула (2) рассматривается на классе $W^1(1)$ при двух предположениях:

а) $t_{-N} = -1$, $t_N = 1$, т.е. (2) – формула типа Маркова;

б) $-1 \le t_{-N}$, $t_N \le 1$.

Теорема 1 [33, 34]. Пусть $\rho = 0$. Среди всевозможных к.ф. типа Маркова, имеющих вид (2), оптимальной на классе $W^1(1)$, является формула

$$\int_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau)}{\tau} d\tau = \sum_{k=1}^{N-1} 2\ln\frac{k+1}{k}\left[\varphi\left(\frac{k(k+1)}{N(N+1)}\right) - \varphi\left(-\frac{k(k+1)}{N(N+1)}\right)\right] +$$

$$+\ln\frac{N+1}{N}[\varphi(1) - \varphi(-1)] + R_N(\varphi). \tag{3}$$

Теорема 2 [33, 34]. Пусть $\rho = 0$. Среди всевозможных к.ф. вида (2) с узлами, удовлетворяющими условию $-1 \le t_{-N} < \cdots < t_{-1} \le 0 \le t_1 < \cdots << t_N \le 1$, оптимальной на классе $W^1(1)$ является к.ф.

$$\int_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau)}{\tau} d\tau = \sum_{k=1}^{N} 2\ln\frac{k+1}{k}\left[\varphi\left(\frac{k(k+1)}{(N+1)^2}\right) - \varphi\left(-\frac{k(k+1)}{(N+1)^2}\right)\right] + R_N(\varphi). \quad (4)$$

Замечание. Приведенные выше квадратурные формулы являются единственными известными в настоящее время оптимальными квадратурными формулами вычисления СИ.

Рассмотрим СИ с ядром Гильберта $F\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma - s}{2} d\sigma$, который будем вычислять по к.ф. вида

$$F\varphi = \sum\nolimits_{k=1}^{N} \varphi(s_k) p_k(s) + R_N(s, s_k, p_k(s), \varphi)$$

с узлами $0 \le s_k \le 2\pi$ и весами $p_k(s)$, $k = 1, 2, ..., N$, и СИ с ядром Коши вида $T\varphi = \int_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - t}$ $\quad (t \in (-1,1))$, который будем вычислять по к.ф. вида

$$T\varphi = \sum\nolimits_{k=-N}^{N} \varphi(t_k) p_k(t) + R_N(t, t_k, \varphi),$$

где $-1 \le t_{-N} < \cdots < t_{-1} < t_0 < t_1 < \cdots < t_N \le 1$.

Для вычисления сингулярных интегралов с ядрами Гильберта и Коши построены асимптотически оптимальные и оптимальные по порядку квадратурные формулы на классах функций Гельдера и Соболева.

Наряду с сингулярными интегралами асимптотически оптимальные и оптимальные по порядку кубатурные формулы построены для вычисления полисингулярных и многомерных сингулярных интегралов на классах функций Гельдера и Соболева.

Отметим, что в [35] (см. также [34]) предложен общий метод оценки снизу погрешности вычислений интегралов в свертках по квадратурным и кубатурным формулам. Этот метод был использован для оценки снизу построенных асимптотически оптимальных квадратурных и кубатурных формул вычисления сингулярных, полисингулярных и многомерных сингулярных интегралов. Этот же метод был использован при построении асимптотически оптимальных и оптимальных по порядку пассивных алгоритмов вычисления гиперсингулярных, полигиперсингулярных и многомерных гиперсингулярных интегралов.

Были рассмотрены следующие гиперсингулярные интегралы.

Гиперсингулярные интегралы с фиксированной особенностью:

$$I\varphi = \int_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau^{\nu}}, \quad \nu = 2, 3, \ldots;$$

$$F\varphi = \int_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau)d\tau}{|\tau|^{\nu+\alpha}}, \quad \nu = 2,3,\ldots, 0 < \alpha < 1.$$

Для вычисления интегралов $I\varphi$ и $F\varphi$ используются квадратурные формулы:

$$I\varphi = \sum_{k=-N}^{N} \sum_{l=0}^{\rho} p_{kl}\varphi^{(l)}(t_k) + R_N(p_{kl}, t_k, \varphi);$$

$$F\varphi = \sum_{k=-N}^{N} \sum_{l=0}^{\rho} p_{kl}\varphi^{(l)}(t_k) + R_N(p_{kl}, t_k, \varphi).$$

На классах функций $W^r(1)$ и $W_p^r(1)$, $r \geq \nu$, $1 \leq p < \infty$, построены асимптотически оптимальные и оптимальные по порядку квадратурные формулы.

Гиперсингулярные интегралы с переменной сингулярностью.

Построены оптимальные по порядку квадратурные формулы вычисления интегралов вида $T\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{\varphi(\sigma)}{\sin^p \frac{\sigma - s}{2}} d\sigma$, $K\varphi = \int_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau)}{(\tau - t)^p} d\tau$, $-1 < t < 1$, $p-$ целое число, $p = 2,3,\ldots$

Построены оптимальные по порядку кубатурные формулы вычисления интегралов

$$I\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\varphi(\sigma_1, \sigma_2)d\sigma_1 d\sigma_2}{\sin^{p_1}\frac{\sigma_1 - s_1}{2} \sin^{p_2}\frac{\sigma_2 - s_2}{2}}, \; p_1, p_2 = 2,3,\ldots,$$

$$A\varphi = \int_{L_1}\int_{L_2} \frac{\varphi(\tau_1, \tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1 - t_1)^{p_1}(\tau_2 - t_2)^{p_2}},$$

где L_1 и L_2 – замкнутые гладкие Ляпуновские контуры в комплексных плоскостях. Исследуются приближенные методы вычисления бигиперсингулярных интегралов

$$A\varphi = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau_1, \tau_2)}{(\tau_1 - t_1)^{p_1}(\tau_2 - t_2)^{p_2}} d\tau_1 d\tau_2$$

кубатурными формулами вида

$$A\varphi = \sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{M}\sum_{i_1=0}^{\rho_1}\sum_{i_2=0}^{\rho_2} p_{kli_1i_2}(t_1, t_2)\varphi^{(i_1, i_2)}(x_k, y_l) +$$

$$+ R_{NM}(t_1, t_2; p_{kli_1i_2}(t_1, t_2); x_k, y_l; \varphi)$$

на различных классах функций.

Для вычисления многомерных гиперсингулярных интегралов $F\varphi = \int_{-1}^{1} \cdots \int_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau_1,\ldots,\tau_l)}{(\tau_1^2+\cdots+\tau_l^2)^{p/2}} d\tau_1 d\tau_2 \cdots d\tau_l$, $p > l$, построены оптимальные по порядку кубатурные формулы на пространствах Соболева.

При исследовании многослойных пластин [36] был найден новый вид гиперсингулярных интегралов $\iint_G \frac{f(\tau_1,\tau_2)}{\gamma(\tau_1,\tau_2)} d\tau_1 d\tau_2$, где уравнение $\gamma(\tau_1,\tau_2)=0$ имеет корни r-го порядка, $r = 3,4,\ldots$, кривая $\gamma(\tau_1,\tau_2)=0$ расположена в области G. Методы вычисления упомянутого выше гиперсингулярного интеграла изложены в [37].

3. Сингулярные и гиперсингулярные интегральные уравнения

Приближенные методы решения сингулярных и гиперсингулярных интегральных (СИУ и ГИУ) уравнений являются основным направлением в научной работе кафедры.

Построены и обоснованы методы коллокации и механических квадратур приближенного решения следующих видов СИУ:

– линейных:

$$a(t)x(t) + \frac{1}{\pi i}\int_{\gamma} \frac{h(t,\tau)x(\tau)d\tau}{\tau - t} = f(t),$$

$$a(t)x(t) + \frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1} \frac{h(t,\tau)x(\tau)d\tau}{\tau - t} = f(t);$$

– нелинейных:

$$a(t,x(t)) + \frac{1}{\pi i}\int_{\gamma} \frac{h(t,\tau,x(\tau))d\tau}{\tau - t} = f(t),$$

$$a(t,x(t)) + \frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1} \frac{h(t,\tau,x(\tau))d\tau}{\tau - t} = f(t).$$

Здесь $\gamma -$ единичная окружность с центром в начале координат.

Проведено обоснование методов коллокации и механических квадратур, доказана сходимость метода Ньютона – Канторовича. Обоснование проведено в пространстве Гельдера и в пространстве суммируемых функций.

Результаты, полученные для СИУ, обобщены на системы сингулярных интегральных уравнений и на сингулярные интегродифференциальные уравнения.

Построены приближенные решения методами коллокации и механических квадратур бисингулярных интегральных уравнений:

$$a(t_1,t_2)x(t_1,t_2) + \frac{b(t_1,t_2)}{\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{x(\tau_1,t_2)d\tau_1}{\tau_1 - t_1} + \frac{c(t_1,t_2)}{\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{x(t_1,\tau_2)d\tau_2}{\tau_2 - t_2} -$$

$$-\frac{d(t_1,t_2)}{\pi^2}\int_{\gamma_1}\int_{\gamma_2}\frac{x(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1-t_1)(\tau_2-t_2)}+\int_{\gamma_1}\int_{\gamma_2}h(t_1,t_2,\tau_1,\tau_2)x(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2=f(t_1,t_2).$$

Здесь γ_i – единичная окружность в плоскости комплексной переменной $Z_i, i=1,2$.

Исследованы приближенные методы решения нелинейных бисингулярных интегральных уравнений.

Были построены и обоснованы вычислительные схемы методов коллокации и механических квадратур применительно к многомерным СИУ:

$$a(t)x(t)+\int_G\frac{\varphi(t,\theta)x(\tau)d\tau}{(r(t,\tau))^2}=f(t),$$

где $t=(t_1,t_2)$, $\tau=(\tau_1,\tau_2)$, $r(t,\tau)=((t_1-\tau_1)^2+(t_2-\tau_2)^2)^{1/2}$, $\theta=(t-\tau)/r(t,\tau)$, G – область в R^2.

Наряду с линейными исследованы приближенные методы решения нелинейных многомерных СИУ:

$$a(t,x(t))+\int_G\frac{\varphi(t,\theta,x(\tau))d\tau}{(r(t,\tau))^2}=f(t).$$

Полученные результаты подытожены в монографии [19], в которой приведена подробная библиография.

Отметим исследования условий разрешимости вырожденных СИУ вида

$$a(t)x(t)+\frac{b(t)}{\pi i}\int_L\frac{x(\tau)d\tau}{\tau-t}+\int_L h(t,\tau)x(\tau)d\tau=f(t),$$

у которых $a^2(t)-b^2(t)\equiv 0,\ t\in L.$

Построены и обоснованы сплайн-коллокационные методы решения гиперсингулярных интегральных уравнений

$$a(t)x(t)+b(t)\int_{-1}^{1}\frac{x(\tau)d\tau}{(\tau-t)^p}+\int_{-1}^{1}h(t,\tau)x(\tau)d\tau=f(t);$$

$$a(t_1,t_2)x(t_1,t_2)+b(t_1,t_2)\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{x(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1-t_1)^{p_1}(\tau_2-t_2)^{p_2}}+$$

$$+\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}h(t_1,t_2,\tau_1,\tau_2)x(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2=f(t_1,t_2);$$

$$a(t_1,t_2)x(t_1,t_2)+b(t_1,t_2)\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{x(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1-t_1)^2+(\tau_2-t_2)^2)^{p/2}}+$$

$$+\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} h(t_1,t_2,\tau_1,\tau_2)x(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 = f(t_1,t_2)$$

при различных условиях, налагаемых на коэффициенты и ядра уравнений.

Построены проекционные методы решения нелинейных гиперсингулярных интегральных уравнений.

Обзоры полученных результатов содержатся в работах [38–40].

4. Теория устойчивости движения

Одним из научных направлений, активно развивающимся на кафедре, является устойчивость и стабилизация движения. Исследовалась устойчивость и асимптотическая устойчивость:

– систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ):

$$\frac{dx(t)}{dt} = a(t, x(t)),$$

где

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))^T, \ a(t, x(t)) = (a_1(t, x(t)), a_2(t, x(t)), \ldots, a_n(t, x(t)))^T;$$

– систем линейных ОДУ с запаздываниями, зависящими от времени:

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j(t) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(t)x_j(t - h_{ij}(t)), \ i = 1,2,...,n,$$

с начальными условиями $x_i(t) = \eta_i(t), i = 1,2,...,n,$ где $a_{ij}(t)$, $b_{ij}(t)$, $i, j = 1,2,...,n,$ – непрерывные функции; $h_{ij}(t)$ – непрерывные функции, удовлетворяющие следующим условиям: $0 < h_* \le h_{ij} \le h_{ij}(t) \le H_{ij} \le H^*$, $i, j = 1,2,...,n,$ при $0 \le t < \infty$, $\eta_i(t)$, $i = 1,2,...,n,$ – непрерывные функции при $-H^* \le t \le 0$;

– систем нелинейных ОДУ с запаздываниями, зависящими от времени:

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = a_i(t, x_1(t),...,x_n(t)) + b_i(t, x_1(t - h_{i1}(t)),...,x_n(t - h_{in}(t))), \ i = 1,2,...,n,$$

с начальными условиями $x_i(t) = \eta_i(t), i = 1,2,...,n,$ где функции $a_i(t, x_1, \ldots, x_n)$, $b_i(t, x_1, \ldots, x_n)$, $i = 1,2,...,n,$ непрерывны по первой переменной и имеют частные производные по остальным переменным, удовлетворяющие условию Липшица; $h_{ij}(t)$ – непрерывные функции, удовлетворяющие следующим условиям: $0 < h_* \le h_{ij} \le h_{ij}(t) \le H_{ij} \le H^*$, $i, j = 1,2,...,n,$ при $0 \le t < \infty$, $\eta_i(t)$, $i = 1,2,...,n,$ – непрерывные функции;

– системы линейных и нелинейных параболических уравнений.

Рассматривались:

– системы линейных параболических уравнений:

$$\frac{\partial u_i(t,x_1,x_2)}{\partial t} = a_{i1}(t)\frac{\partial^2 u_1(t,x_1,x_2)}{\partial x_1^2} + a_{i2}(t)\frac{\partial^2 u_1(t,x_1,x_2)}{\partial x_2^2} + a_{i3}(t)\frac{\partial^2 u_2(t,x_1,x_2)}{\partial x_1^2} +$$

$$+a_{i4}(t)\frac{\partial^2 u_2(t,x_1,x_2)}{\partial x_2^2} + a_{i5}(t)u_1(t,x_1,x_2) + a_{i6}(t)u_2(t,x_1,x_2) +$$

$$+b_{i1}(t)\frac{\partial^2 u_1(t-\eta_1(t),x_1,x_2)}{\partial x_1^2} + b_{i2}(t)\frac{\partial^2 u_1(t-\eta_1(t),x_1,x_2)}{\partial x_2^2} +$$

$$+b_{i3}(t)\frac{\partial^2 u_2(t-\eta_2(t),x_1,x_2)}{\partial x_1^2} + b_{i4}(t)\frac{\partial^2 u_2(t-\eta_2(t),x_1,x_2)}{\partial x_2^2} +$$

$$+b_{i5}(t)u_1(t-\eta_1(t),x_1,x_2) + b_{i6}(t)u_2(t-\eta_2(t),x_1,x_2),\ \ i=1,2;$$

– системы линейных параболических уравнений с запаздываниями, зависящими от времени:

$$\frac{\partial u_i(t,x)}{\partial t} = a_{i1}(t)\frac{\partial^2 u_1(t,x)}{\partial x_1^2} + a_{i2}(t)\frac{\partial^2 u_1(t,x)}{\partial x_2^2} + a_{i3}(t)\frac{\partial^2 u_2(t,x)}{\partial x_1^2} + a_{i4}(t)\frac{\partial^2 u_2(t,x)}{\partial x_2^2} +$$

$$+a_{i5}(t)u_1(t,x) + a_{i6}(t)u_2(t,x) + +b_{i1}(t)\frac{\partial^2 u_1(t,x_1-\eta_1(t),x_2-\eta_2(t))}{\partial x_1^2} +$$

$$+b_{i2}(t)\frac{\partial^2 u_1(t,x_1-\eta_1(t),x_2-\eta_2(t))}{\partial x_2^2} + b_{i3}(t)\frac{\partial^2 u_2(t,x_1-\eta_1(t),x_2-\eta_2(t))}{\partial x_1^2} +$$

$$+b_{i4}(t)\frac{\partial^2 u_2(t,x_1-\eta_1(t),x_2-\eta_2(t))}{\partial x_2^2} + b_{i5}(t)u_1(t,x_1-\eta_1(t),x_2-\eta_2(t)) +$$

$$+b_{i6}(t)u_2(t,x_1-\eta_1(t),x_2-\eta_2(t)),\ \ i=1,2,$$

при начальных значениях $u_i(0,x)=\varphi_i(x)$, $i=1,2$, $x=(x_1,x_2)$, $-\infty < x_1,x_2 < \infty$;

– системы нелинейных параболических уравнений с запаздываниями, зависящими от времени,

$$\frac{\partial u_i(t,x_1,x_2)}{\partial t} = a_{i1}(t)\frac{\partial^2 u_1(t,x_1,x_2)}{\partial x_1^2} + a_{i2}(t)\frac{\partial^2 u_1(t,x_1,x_2)}{\partial x_2^2} + a_{i3}(t)\frac{\partial^2 u_2(t,x_1,x_2)}{\partial x_1^2} +$$

$$+a_{i4}(t)\frac{\partial^2 u_2(t,x_1,x_2)}{\partial x_2^2} + a_{i5}(t,u_1(t,x_1,x_2),u_2(t,x_1,x_2)) + b_{i1}(t)\frac{\partial^2 u_1(t-\eta_1(t),x_1,x_2)}{\partial x_1^2} +$$

$$+b_{i2}(t)\frac{\partial^2 u_1(t-\eta_1(t),x_1,x_2)}{\partial x_2^2} + b_{i3}(t)\frac{\partial^2 u_2(t-\eta_2(t),x_1,x_2)}{\partial x_1^2} + b_{i4}(t)\frac{\partial^2 u_2(t-\eta_2(t),x_1,x_2)}{\partial x_2^2} +$$

$$+b_{i5}(t,u_1(t-\eta_1(t),x_1,x_2),u_2(t-\eta_2(t),x_1,x_2),\ \ i=1,2,$$

с начальными значениями $u_i(t,x_1,x_2)=\varphi_i(t,x_1,x_2)$, $i=1,2$, $t\in[t_0-H,t_0]$, $-\infty<x_1,x_2<\infty$.

Кроме приведенных выше уравнений, исследована устойчивость решений систем дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной [41], устойчивость по Тьюрингу систем дифференциальных уравнений с дробными производными [42], а также устойчивость решений систем ОДУ и систем параболических уравнений с дробными производными [43].

В основу исследований положено обобщение первого метода Ляпунова, заключающееся в построении семейства линеаризованных операторов. Достаточные условия устойчивости решений дифференциальных уравнений получены в результате исследования норм и логарифмических норм операторов, входящих в эти семейства. Этот метод положен также в основу исследований по стабилизации движения. С использованием данного подхода И. В. Бойковым была решена проблема Брокетта [44]. Отличительной особенностью полученных достаточных условий устойчивости решений систем ОДУ и систем уравнений в частных производных является то, что они одновременно охватывают как регулярный, так и всевозможные критические случаи. Подробное изложение результатов, полученных на кафедре ВиПМ в этом направлении до 2007 г., содержится в монографии И. В. Бойкова [45]. С более поздними результатами можно познакомиться по публикациям [42, 46–48], в которых содержится достаточно подробная библиография.

Информатика

В 50–80 гг. прошлого столетия Пенза была одним из центров вычислительной техники в СССР. В Пензенском научно-исследовательском институте математических машин разрабатывалась серия знаменитых «Уралов», велись работы по разработке аналоговых вычислительных машин и аналого-цифровых комплексов. Кафедра ВМ принимала участие в исследованиях по этой тематике. В 1957 г. была издана книга И. И. Этермана [49] – одна из первых в мире публикаций, посвященных конструкции аналоговых вычислительных машин и методам решения систем алгебраических и дифференциальных уравнений на этих машинах, она была переведена на немецкий и английский языки. В 2005 г. в связи с возродившимся интересом к аналоговой вычислительной технике книга была переиздана на английском языке [50].

В период с 1958 по 1960 г. на кафедре работал Б. А. Трахтенброт[1], один из основоположников теоретической информатики в СССР, выдающийся специалист по дискретной математике и теории автоматов. В период работы на кафедре Б. А. Трахтенброт вместе с Н. Е. Кобринским организовал городской семинар по теории автоматов. В этот же период ими была написана первая в СССР книга по теории автоматов [52].

В настоящее время на кафедре исследуется устойчивость нейронных сетей с различной топологией [45, 47, 53] и разрабатываются методы реше-

---

[1] Д.ф.-м.н., профессор Б. А. Трахтенброт работал на кафедре ВМ с 1958 по 1960 г. В 1960 г., после создания в Новосибирске Академгородка, Б. А. Трахтенброт вместе с рядом своих пензенских учеников уехал в Новосибирск, где создал крупную научную школу по теории автоматов. Еще одну школу он создал в Израиле, куда переехал в 1980 г. (Биографический очерк о Б. А. Трахтенброте опубликован в [51].)

ния уравнений математической физики на нейронных сетях Хопфилда [54–56].

В период с 1993 по 2006 г. на кафедре проводились исследования оптимальных по надежности схем, составленных из ненадежных элементов. Это направление исследований, восходящее к Джону фон Нейману, было чрезвычайно актуально на заре компьютерной эпохи, когда вычислительные машины строились из очень ненадежных элементов, но не потеряло актуальности и в настоящее время. Данное направление развивала д.ф.-м.н., профессор М. А. Алехина[1] [57].

В настоящее время на кафедре проводит исследования по сжатию информации и по криптографии, привлекая к ним бакалавров и магистрантов, к.ф.-м.н., доцент Ю. Ф. Захарова [58, 59].

5. Численные методы геофизики

Исследования в области геофизики проводятся в следующих направлениях:

а) оптимальные методы аппроксимации геофизических полей;

б) оптимальные методы решения прямой задачи гравиразведки;

в) приближенные методы решения обратной задачи гравиразведки;

г) оптимальные методы трансформации потенциальных полей.

В цикле работ И. В. Бойкова и А. И. Бойковой [60–62] исследована гладкость потенциальных полей различной природы. Показано, что потенциальные поля различного происхождения описываются классами функций, подобными классам $Q_{r,\gamma}, B_{r,\gamma}$. Построены оптимальные по порядку по точности методы аппроксимации этих полей. Эти исследования подытожены в книге [63].

В цикле работ (И. В. Бойков, А. И. Бойкова, М. В. Кравченко, В. И. Крючко, Н. Ю. Кудряшова, А. В. Филиппов) исследовалась гладкость сопряженных функций, представимых сингулярными интегралами и многомерными интегралами типа Коши. Построены оптимальные методы аппроксимации сопряженных функций. Аналогичные исследования проведены для тепловых полей [64].

Большой цикл работ (И. В. Бойков, А. И. Бойкова, М. В. Кравченко, В. И. Крючко, Н. Ю. Кудряшова, Н. В. Мойко, В. А. Рязанцев, А. В. Филиппов, В. Е. Щукина) посвящен решению обратных задач логарифмического и ньютоновского потенциала в линейной и нелинейной постановках. В этот цикл также входят работы по аналитическому продолжению гравитационных и лапласовых полей. Частично эти исследования отражены в книге [63].

В работе [65] предложена новая постановка обратных задач логарифмического и ньютоновского потенциала, заключающаяся в том, что в контактных задачах одновременно определяются граница аномального тела, его плотность и глубина залегания. Построены аналитические и численные методы решения этой задачи для логарифмического и ньютоновского потенциалов.

[1] Д.ф.-м.н., профессор М. А. Алехина в период с 1993 по 2004 г. работала на кафедре ВиПМ. В настоящее время – профессор кафедры «Математика» в Пензенском государственном технологическом университете.

6. Обратные задачи математической физики

Наряду с обратными задачами гравиразведки на кафедре проводятся исследования обратных задач математической физики. Особое внимание уделяется обратным коэффициентным задачам для параболических уравнений [66]. Построены численные методы решения обратных задач теплопроводности [67], восстановления граничных и начальных условий для ряда линейных и нелинейных граничных и начальных задач для параболических уравнений [68].

7. Математические модели биологии, экологии и экономики

7.1. Математические модели иммунологии

В последние десятилетия еще одним направлением научной работы кафедры стало построение и исследование математических моделей биологии, экологии и экономики. Основное внимание при этом уделяется математическим моделям иммунологии.

В монографии Г. И. Марчука [69] предложен и исследован ряд моделей поведения иммунной системы при различных внешних воздействиях.

Базовая (или так называется простейшая) модель иммунологии описывается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &\frac{dV(t)}{dt} = (\beta - \gamma F(t))V(t), \\ &\frac{dC(t)}{dt} = \xi(m)\alpha V(t-\tau)F(t-\tau) - \mu_c(C(t) - C^*), \\ &\frac{dF(t)}{dt} = \rho C(t) - (\mu_f + \eta\gamma V(t))F(t), \\ &\frac{dm}{dt} = \sigma V(t) - \mu_m m(t), \end{aligned} \tag{5}$$

где $V(t)$ – концентрация патогенных размножающихся антигенов; $F(t)$ – концентрация антител; $C(t)$ – концентрация плазматических клеток; $m(t)$ – относительная характеристика пораженного органа; коэффициенты и константы β, γ, $\xi(m)$, μ_c, C^*, τ, α, μ_m, σ, ρ, μ_f, η неотрицательные.

Система (5) исследуется при различных начальных условиях и, в зависимости от начальных условий, имеет различные стационарные решения. Одним из них является стационарное решение, описывающее состояние здорового организма:

$$V(t_0) = 0, C(t_0) = C^*, F(t_0) = F^* = \rho C^* / \mu_f, m(t_0) = 0. \tag{6}$$

Другие стационарные решения зависят от начальных условий.

Устойчивость начальной задачи (5), (6) методом линеаризации была исследована в [69]. Было показано, что все малые возмущения стационарного решения задачи Коши (5), (6) при выполнении условия $\beta < \gamma F^*$ с течением времени стремятся к нулю, т.е. стационарное решение асимптотически устойчиво.

Помимо базовой модели иммунологии Г. И. Марчуком [69] были предложены и исследованы математические модели иммунного ответа на бактериальные и вирусные заражения.

В цикле работ И. В. Бойкова, Ю. Ф. Захаровой, А. А. Дмитриевой [70–72] предложены обобщения базисной модели иммунологии и моделей протекания вирусных и бактериальных заболеваний, которые заключаются в следующем:

а) в уравнения введены логистические слагаемые, учитывающие «конкуренцию» антител (антигенов) между собой;

б) параметры моделей зависят от времени.

Исследована устойчивость и асимптотическая устойчивость рассматриваемых математических моделей. Исследовано влияние различных терапий на динамику процессов в иммунной системе.

7.2. Математические модели развивающихся систем

Большой класс задач экономики, экологии, медицины и ряда других областей описывается моделями развивающихся систем, введенными В. М. Глушковым и подробно описанными в [73]. Основным аппаратом моделирования развивающихся систем являются системы нелинейных уравнений Вольтерра.

Двухпродуктовая модель развивающихся систем описывается системой нелинейных интегральных уравнений Вольтерра:

$$x(t)-\int\limits_{y(t)}^{t} h(t,\tau)g(\tau)x(\tau)d\tau=0,$$

$$\int\limits_{y(t)}^{t} k(t,\tau)[1-g(\tau)]x(\tau)d\tau=f(t),\ \ 0<t_0\le t\le T, \tag{7}$$

с неизвестными функциями $x(t)\in C_{[0,\infty]}$ и $y(t)\in C^1_{[t_0,\infty]}$ $(y(t)<t)$ и заданными на сегменте $[t_0,T]$ функциями $h(t,\tau), k(t,\tau)\in C_{[0,\infty]\times[t_0,\infty]}$, $f(t), g(t)\in C_{[t_0,\infty]}$ $(0<g(t)<1)$.

Наряду с двухпродуктовыми также рассматриваются n-продуктовые модели развивающихся систем, которые описываются нелинейными системами $n=r+p+1$ уравнений вида

$$x_i(t)=\sum_{j=1}^{r}\int\limits_{y(t)}^{t} H_{ij}(t,\tau)x_j(\tau)d\tau,\ \ i=\overline{1,r},$$

$$f_i(t)=\sum_{j=1}^{r}\int\limits_{y(t)}^{t} K_{ij}(t,\tau)x_j(\tau)d\tau,\ \ i=\overline{1,p}, \tag{8}$$

$$c(t)=\sum_{i=1}^{r}x_i(t)+\sum_{i=1}^{p}f_i(t),\ \ r+p+1=n,$$

где в качестве неизвестных выступают функции $x_i(t), i=\overline{1,r}$; $y_i(t), i=\overline{1,p}$ и $y(t)$; $0 \le t_0 \le t \le T$, $y(t) < t$, $y(t) \ge y(t_0) = 0$; $x_i(t) = \varphi_i(t), t \in [0, t_0]$ – заданная предыстория.

Интегральные уравнения вида (7), (8) имеют многочисленные приложения и необходимость разработки численных методов их решения неоднократно подчеркивалась в литературе (см., например [74]).

В работе [75] построен приближенный метод решения системы (7) на отрезке $[t_0, T]$. Система представлена в виде

$$\begin{aligned} P_1(x(t), y(t)) &\equiv x(t) - \int\limits_{y(t)}^{t} H(t,\tau)x(\tau)d\tau = 0, \\ P_2(x(t), y(t)) &\equiv f(t) - \int\limits_{y(t)}^{t} K(t,\tau)x(\tau)d\tau = 0, \end{aligned} \qquad 0 < t_0 \le t \le T, \tag{9}$$

или в операторной форме:

$$P(X) = (P_1(X), P_2(X)) = 0,\ X = (x(t), y(t)). \tag{10}$$

Здесь $H(t,\tau) = h(t,\tau)g(\tau)$, $K(t,\tau) = k(t,\tau)[1 - g(\tau)]$, причем функции $H(t,\tau)$ и $K(t,\tau)$ полагаются равными нулю при $\tau \notin [t_0, T]$.

Для приближенного решения уравнения (10) построен итерационно-проекционный метод. Система интегральных уравнений (10) по технологии метода механических квадратур аппроксимируется системой нелинейных алгебраических уравнений. При ряде условий доказывается разрешимость аппроксимирующей системы и оценивается погрешность. Решение находится модифицированным методом Ньютона – Канторовича. Построены и обоснованы приближенные методы решения n-продуктовых моделей.

Это исследование продолжено в работе [76], в которой предложен проекционный метод решения двухпродуктовой модели.

Исследования развивающихся систем стимулировали развитие на кафедре направления по построению численных методов решения интегральных уравнений Вольтерра. В цикле работ к.ф.-м.н., доцента А. Н. Тынды построены приближенные методы решения линейных и нелинейных интегральных уравнений Вольтерра с различными характеристиками ядер [77, 78].

8. Идентификация параметров динамических систем

Рассматриваются динамические системы, описываемые линейными и нелинейными интегральными уравнениями в свертках, интегральными уравнениями Фредгольма и Вольтерра, системами обыкновенных дифференциальных уравнений, системами уравнений в частных производных. Рассматриваются ОДУ и уравнения в частных производных с дробными производными. Задача параметрической идентификации динамических систем заключается в определении параметров рассматриваемых систем по одному или нескольким тестовым сигналам. Для каждого вида динамических систем построены и обоснованы численные методы определения их параметров. Алгоритмы параметрической идентификации основаны на одном достаточно общем подходе, являющемся некоторым обобщением операционного исчисления.

Методами краевой задачи Римана и сингулярных интегральных уравнений решена задача одновременного определения входного сигнала и аппаратной (передаточной) функции. Результаты, полученные в этом направлении, опубликованы в циклах статей И. В. Бойкова, И. В. Бойкова и Т. В. Черушевой; И. В. Бойкова и Н. П. Кривулина. Обзор полученных в данном направлении результатов приведен в книге И. В. Бойкова и Н. П. Кривулина [79].

Помимо этих направлений, отметим работы по биометрической голосовой идентификации человека [80].

9. Прямые и обратные задачи электродинамики

С 1987 по 2002 г. на кафедре, под руководством д.ф.-м.н., профессора Ю. Г. Смирнова[1], проводились исследования по прямым и обратным задачам рассеяния волн на поверхностях с различной топологией [81–84]. Методами многомерных сингулярных интегральных уравнений исследовались вопросы существования и единственности решений задач дифракции, для получения решений разрабатывались численные методы, в частности, проекционные методы типа Галеркина.

В настоящее время на кафедре ведутся исследования по численным методам моделирования антенн, в частности, по применению гиперсингулярных интегральных уравнений к моделированию фрактальных антенн [85, 86].

Эти исследования являются продолжением работ, начатых к.т.н., доцентом Е. Г. Романовой по численному моделированию задач электродинамики сингулярными интегральными уравнениями [87] и к.т.н., доцентом Д. В. Тарасовым по исследованию электрических вибраторов [88].

Дополнения

Несколько особняком от основных направлений научных исследований на кафедре стоят работы к.ф.-м.н., доцента И. И. Рябцева, работавшего на кафедре в 50–60-е гг. прошлого столетия. И. И. Рябцев развивал оригинальное операционное исчисление, возникшее на стыке теории обобщенных функций (распределений) и алгебраического операционного исчисления. Полученные результаты были подытожены в его монографии [89].

Заключение

В статье представлены основные направления научной работы кафедры «Высшая и прикладная математика» за 80 лет с ее основания. Начиная с 1991 г. исследования проводились в рамках научной школы «Аналитические и численные методы решения задач математической физики» (организатор и научный руководитель школы – д.ф.-м.н., профессор И. В. Бойков).

Список литературы

1. Левин В. И. По поводу одной задачи С. Рамануджана // Успехи математических наук. 1950. Т. 5, № 3 (37). С. 161–166.

[1] Д.ф.-м.н., профессор Ю. Г. Смирнов работал на кафедре ВиПМ в период с 1987 г. по 2002 г. В настоящее время профессор Ю. Г. Смирнов заведует кафедрой «Математика и суперкомпьютерное моделирование» ПГУ.

2. Левин В. И., Гросберг Ю. М. Дифференциальные уравнения математической физики. М. ; Л. : Гостехиздат, 1951. 576 с.
3. Левин В. И., Фукс Б. А. Функции комплексного переменного и некоторые их приложения. М. ; Л. : Гостехиздат, 1951. 308 с.
4. Левин В. И. Жизнь и творчество индийского математика С. Рамануджана // Историко-математические исследования / под ред. Г. Ф. Рыбкина, А. П. Юшкевича. Вып. 13. М. : ГИТТЛ, 1960. 564 с.
5. Левин В. И. Рамануджан – математический гений Индии. М. : Знание. 1968. 48 с.
6. Левин В. И. Виктор Иосифович Левин. Ученый, педагог, организатор образования // Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем : сб. ст. по материалам XVII Всерос. с международным участием науч.-техн. конф. (Пенза, Россия, 28 ноября – 3 декабря 2022 г.) / под ред. д-ра физ.-мат. наук, профессора И. В. Бойкова. Пенза, 2022. С. 190–195.
7. Левин В. И. К 100-летию И. И. Этермана – видного педагога и ученого // Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем : материалы XV Международной науч.-техн. конф. молодых специалистов, аспирантов и студентов (Пенза Россия, 1–4 июня 2021 г.) / под ред. д-ра физ.-мат. наук, профессора И. В. Бойкова. Пенза, 2021. С. 233–239.
8. Этерман И. И. Асимптотические методы в прикладной математике. Пенза : Изд-во ППИ, 1973. 264 с.
9. Грибкова В. П. Эффективные методы равномерных приближений, основанные на полиномах Чебышева. М. : Изд-во Спутник+, 2017. 194 с.
10. Исследования по теории динамической гравиметрии. М. : Институт физики Земли АН СССР, 1977. 272 с.
11. Бабенко К. И. О некоторых задачах теории приближений и численного анализа // Успехи математических наук. 1985. Т. 40, № 1. С. 3–28.
12. Бойков И. В. Оптимальные по точности алгоритмы вычисления интегралов // Оптимальные методы вычислений и их применение : сб. Вып. 8. Пенза : ППИ, 1987. С. 4–22.
13. Бойков И. В. Аппроксимация некоторых классов функций локальными сплайнами // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1998. Т. 38, № 1. С. 25–33.
14. Бойков И. В. К задаче К. И. Бабенко об асимптотике погрешности численных решений эллиптических уравнений // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Сер. Естественные науки. 2003. № 6. С. 3–29.
15. Бойков И. В. Оптимальные методы приближения функций и вычисления интегралов. Пенза : Изд-во ПГУ, 2007. 236 с.
16. Бабенко К. И. Основы численного анализа. М. ; Ижевск : НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2002. 848 с.
17. Захарова Ю. Ф. Оптимальные методы вычисления многомерных сингулярных интегралов и решения сингулярных интегральных уравнений : автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук : 05.13.18. Саранск, 2004.
18. Бойков И. В., Тында А. Н. Оптимальные по точности приближенные методы решения интегральных уравнений Вольтерра // Дифференциальные уравнения. 2002. № 9. С. 1215–1232.
19. Бойков И. В. Приближенное решение сингулярных интегральных уравнений. Пенза : Изд-во ПГУ, 2004. 316 с.
20. Boykov I. V., Tynda A. N. Numerical methods of optimal accuracy for weakly singular Volterra integral equations // Annals of Functional Analysis. 2015. Vol. 6, № 4. P. 114–133. doi: 10.15352/afa/06-4-114
21. Проблемы Гильберта / под ред. П. С. Александрова. М. : Наука, 1969. 240 с.
22. Колмогоров А. Н. О представлении непрерывных функций нескольких переменных суперпозициями функций меньшего числа переменных // Доклады Академии наук СССР. 1956. Т. 108. С. 179–182.

23. Арнольд В. И. О функциях трех переменных // Доклады Академии наук СССР. 1957. Т. 114, № 4. С. 679–681.
24. Колмогоров А. Н. О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиций непрерывных функций одного переменного и сложения // Доклады Академии наук СССР. 1957. Т. 114. С. 953–956.
25. Колмогоров А. Н. Избранные труды. Математика и механика. М. : Наука, 1985. 470 с.
26. Витушкин А. Г. Доказательство существования аналитических функций многих переменных, не представимых линейными суперпозициями непрерывно дифференцируемых функций меньшего числа переменных // Доклады Академии наук СССР. 1964. Т. 156, № 6. С. 1258–1261.
27. Sprecher D. A. A Survey of Solved and Unsolved Problems on Superpositions of Functions // Journal of Approximation Theory. 1972. Vol. 6. P. 123–134.
28. Бойков И. В. К проблеме Колмогорова о представлении аналитических функций нескольких переменных суперпозициями непрерывно дифференцируемых функций меньшего числа переменных // Вестник ОГГГГН РАН. 2000. № 3 (13).
29. Boikov I. V. Solution of Kolmogorov Problem and Representation of Analytical Functions of Many Variables by Superpositions of Continuously Differentiable Functions with Less Number of Variables // Herald of the DGGGMS RAS. 2000. № 3 (13). URL: http://www.scgis.ru/russian/cp1251/h.dgggms/3-2000/boikovengl.htm..begin
30. Бойков И. В. К проблеме Колмогорова о невозможности представления аналитических функций многих переменных суперпозициями непрерывно дифференцируемых функций меньшего числа переменных // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Сер. Естественные науки. 2002. № 1. С. 5–14.
31. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М. : Наука, 1963. 640 с.
32. Михлин С. Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М. : Физматгиз, 1962. 254 с.
33. Бойков И. В., Руденко А. К. Об оптимальных квадратурных формулах для вычисления сингулярных интегралов : межвуз. сб. науч. тр. Вып. 1. Пенза : Изд-во ППИ, 1979. С. 21–30.
34. Бойков И. В. Приближенные методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. Ч. 1: Сингулярные интегралы. Пенза : Изд-во ПГУ, 2005. 360 с.
35. Бойков И. В. Оптимальные по точности алгоритмы приближенного вычисления сингулярных интегралов. Саратов : Изд-во Сарат. гос. ун-та, 1983. 210 с.
36. Boykov I. V., Boykova A. I., Ventsel E. S. Fundamental Solutions for Thick Sandwich Plate // Engineering Analisis and Boundary Elements. 2004. Vol. 28. P. 1437–1444.
37. Бойков И. В., Семов М. А. Об одном методе вычисления гиперсингулярных интегралов // Известия вузов. Математика. 2016. № 3. С. 3–17.
38. Бойков И. В., Добрынина Н. Ф., Домнин Л. Н. Приближенные методы вычисления интегралов Адамара и решения гиперсингулярных интегральных уравнений. Пенза : Изд-во Пенз ГТУ, 1996. 188 с.
39. Бойков И. В. Аналитические и численные методы решения гиперсингулярных интегральных уравнений // Динамические системы. 2019. Т. 9 (37), № 3. 244–272.
40. Boykov I. V. Approximate Methods for Solving Hypersingular integral Equations / Topics in Integral and Integro-Difference Equations. Theory and Applications / ed. by Harenfra Singh, Hemen Dutta, Marcelo M. Cavalcanti. Springer, 2021. P. 63–102.
41. Бойков И. В. Об определении областей устойчивости систем дифференциальных уравнений с малыми параметрами при производных // Автоматика и телемеханика. 1998, № 6. С. 88–96.
42. Бойков И. В., Рязанцев В. А. Устойчивость по Тьюрингу динамических систем, описываемых уравнениями с дробными производными // Журнал Средневолжского математического общества. 2012. Т. 14, № 1. С. 1–9.

43. Бойков И. В., Рязанцев В. А. Устойчивость решений параболических уравнений с дробными производными // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2012. № 4. С. 84–100.
44. Бойков И. В. К стабилизационной проблеме Брокетта // Автоматика и телемеханика. 2005. № 5. С. 76–82.
45. Бойков И. В. Устойчивость решений дифференциальных уравнений. Пенза : Изд-во ПГУ, 2008. 244 с.
46. Бойков И. В. Устойчивость установившихся решений систем нелинейных неавтономных дифференциальных уравнений с запаздываниями // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54, № 4. С. 435–457.
47. Boykov I. V., Roudnev V., Boykova A. Stability of Solutions to Systems of Nonlinear Differential Equations with Discontinuous Right-Hand Sides: Applications to Hopfield Artificial Neural Networks // Mathematics. 2022. Vol. 10. P. 1524. doi: 10.3390/math10091524
48. Бойков И. В. Устойчивость решений систем параболических уравнений с запаздываниями // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2023. № 1. С. 69–84. doi: 10.21685/2072-3040- 2023-1-6
49. Этерман И. И. Математические машины непрерывного действия. М. : Машгиз, 1957. 236 с.
50. Eterman I. I. Analogue Computers. New York : Pergamon press, 2005.
51. Левин В. И. К 100-летию Б. А. Трахтенброта, выдающегося ученого и педагога // Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем : сб. ст. по материалам XVII Всерос. с международным участием науч.-техн. конф. (Пенза, Россия, 1–4 декабря 2021 г.) / под ред. д-ра физ.-мат. наук, профессора И. В. Бойкова. Пенза, 2021. С. 159–164.
52. Трахтенброт Б. А., Кобринский Н. Е. Введение в теорию конечных автоматов. М. : ИФМЛ, 1962. 405 с.
53. Бойков И. В., Руднев В. А., Бойкова А. И. Устойчивость нейронных сетей Коэна – Гроссберга с запаздываниями, зависящими от времени // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2023. № 2. С. 41–58. doi: 10.21685/2072-3040-2023-2-5
54. Бойков И. В., Руднев В. А., Бойкова А. И. Приближенное решение задач математической физики на нейронных сетях Хопфилда // Нейрокомпьютеры, разработка, применение. 2013. № 10. С. 13–22.
55. Бойков И. В., Баулина О. А. Приближенное решение интегральных уравнений на нейронных сетях Хопфилда // Журнал Средневолжского математического общества. 2013. Т. 15, № 1. С. 41–51.
56. Boykov I., Roudnev V., Boykova A. Approximate Methods for Solving Problems of Mathematical Physics on Neural Hopfield Networks // Mathematics. 2022. Vol. 10. doi: 10.3390/math10132207
57. Алехина М. А. Синтез и сложность надежных схем в базисе $\{\vee, \bar{\ }\}$ при однотипных константных неисправностях на входах элементов // Дискретная математика. 2003. Т. 15, № 1. С. 98–109.
58. Захарова Ю. Ф., Кочнева А. А. Вопросы защиты информации при использовании технологий виртуализации // Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем : материалы XV Междунар. науч.-техн. конф. молодых специалистов, аспирантов и студентов Россия (Пенза, 1–4 июня 2021 г.) / под ред. д-ра физ.-мат. наук, профессора И. В. Бойкова. Пенза, 2021. С. 183–187.
59. Захарова Ю. Ф., Макарова С. Е. Особенности криптографических алгоритмов, основанных на многомерных квадратичных системах // Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем : материалы XV Междунар. науч.-техн. конф. молодых специалистов, аспирантов и студентов

Россия (Пенза, 1–4 июня 2021 г.) / под ред. д-ра физ.-мат. наук, профессора И. В. Бойкова. Пенза, 2021. С. 193–198.
60. Бойков И. В., Бойкова А. И. Оптимальные методы восстановления потенциальных полей // Известия РАН. Физика Земли. 1998. № 8. С. 70–78.
61. Бойков И. В., Бойкова А. И. Оптимальные методы восстановления потенциальных полей. I // Известия РАН. Физика Земли. 2001. № 12. С. 78–89.
62. Бойков И. В., Бойкова А. И. Оптимальные по точности методы восстановления потенциальных полей. II // Известия РАН. Физика Земли. 2003. № 3. С. 87–93.
63. Бойков И. В., Бойкова А. И. Приближенные методы решения прямых и обратных задач гравиразведки. Пенза : Изд-во ПГУ, 2013. 510 с.
64. Бойков И. В., Рязанцев В. А. К вопросу об оптимальной аппроксимации геофизических полей // Сибирский журнал вычислительной математики. 2021. Т. 24, № 1. С. 17–34.
65. Бойков И. В., Рязанцев В. А. К вопросу об одновременном восстановлении плотности и уравнения поверхности в обратной задаче гравиметрии для контактной поверхности // Сибирский журнал вычислительной математики. 2020. № 3. С. 289–308.
66. Бойков И. В., Рязанцев В. А. Об одном приближённом методе решения обратной коэффициентной задачи для уравнения теплопроводности // Сибирский журнал индустриальной математики. 2021. Т. 24, № 2. С. 1–16.
67. Бойков И. В., Рязанцев В. А. Об одном приближенном методе решения обратной задачи теплопереноса // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2023. № 2. С. 31–40. doi: 10.21685/2072-3040-2023-2-4
68. Boykov I. V., Ryazantsev V. A. On the problem of recovering boundary conditions in the third boundary value problem for parabolic equation // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2021. № 2. С. 3–13. doi: 10.21685/2072-3040-2021-2-1
69. Марчук Г. И. Математические модели в иммунологии. Вычислительные методы и эксперименты. М. : Наука, 1991. 304 с.
70. Бойков И. В., Захарова Ю. Ф., Дмитриева А. А. Устойчивость простейшей математической модели иммунологии // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2008. № 4. С. 32–46.
71. Бойков И. В., Захарова Ю. Ф., Дмитриева А. А. Устойчивость моделей противовирусного и противобактериального иммунного ответа // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2008. № 4. С.47–57.
72. Boykov I. V., Zakharova J. F., Dmitrieva A. A., Prostova N. V. Stability of mathematical models of immunology // Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем : сб. ст. по материалам XII Всерос. с международным участием науч.-техн. конф. (Пенза, Россия, 4–6 декабря 2017 г.) / под ред. д-ра физ.-мат. наук, профессора И. В. Бойкова. Пенза, 2017. С. 87–108.
73. Глушков В. М., Иванов В. В., Яненко В. М. Моделирование развивающихся систем. М. : Наука, 1983. 352 с.
74. Baker C. T. H. A perspective on the numerical treatment of Volterra equations // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2000. Vol. 125. P. 217–249.
75. Бойков И. В., Тында А. Н. Приближенное решение нелинейных интегральных уравнений теории развивающихся систем // Дифференциальные уравнения. 2003. Т. 39, № 9. С. 1214–1223.
76. Тында А. Н. Об одном прямом методе решения системы нелинейных интегральных уравнений двухсекторных моделей экономики // Журнал Средневолжского математического общества. 2006. Т. 8, № 1. С. 314–319.
77. Tynda A. N., Noeiaghdam S., Sidorov D. N. Polynomial spline collocation method for solving weakly regular Volterra integral equations of the first kind // The Bulletin of Ir-

kutsk State University. Series Mathematics. 2022. Vol. 39. P. 62–79. doi: 10.26516/1997-7670.2022.39.62

78. Тында А. Н. Методы численного анализа некоторых интегральных динамических систем с запаздывающими аргументами // Журнал Средневолжского математического общества. 2023. Т. 25, № 1. С. 565–577. doi: 10.15507/2079-6900.25.202301.565-577
79. Бойков И. В., Кривулин Н. П. Аналитические и численные методы идентификации динамических систем. Пенза : Изд-во ПГУ, 2016. 398 с.
80. Калашников Д. М. Биометрическая голосовая идентификация человека по парольной голосовой фразе в условиях повышенного шума : автореф. дис. … канд. техн. наук : 05.13.01. Пенза, 2017.
81. Смирнов Ю. Г. О фредгольмовости системы псевдодифференциальных уравнений в задаче дифракции на ограниченном экране // Дифференциальные уравнения. 1992. Т. 28, № 1. С. 136–143.
82. Smirnov Yu. G. Method of Singular Integral. Operator-Functions for the Transmission Line Problem // Electromagnetics. 1993. Vol. 14, № 2. P. 145–156.
83. Смирнов Ю. Г. О разрешимости векторных итегродифференциальных уравнений в задаче дифракции электромагнитного поля на экранах произвольной формы // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1994. Т. 34, № 10. С. 1461–1475.
84. Ильинский А. С., Смирнов Ю. Г. Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах. М. : Издат. предприятие редакции журнала «Радиотехника», 1996. 176 с.
85. Boykov I. V., Aikashev P. To the numerical method for synthesis of fractal antennas // 2019 International Seminar on Electron Devices Design and Production (SED 2019). (Prague, Czech Republic 23–24 April 2019). Prague, 2019. P. 119–125.
86. Бойков И. В., Айкашев П. В. Применение непрерывного операторного метода к решению уравнений Поклингтона и Галлена для тонких проволочных антенн // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2020. № 3. С. 131–150. doi: 10.21685/2072-3040-2020-3-10
87. Романова Е. Г. Численное моделирование задач электродинамики и аэродинамики сингулярными интегральными уравнениями : автореф. дис. … канд. техн. наук : 05.13.18. Пенза, 2007.
88. Тарасов Д. В. Численное исследование моделей электрических вибраторов, описываемых гиперсингулярными интегральными уравнениями : автореф. дис. … канд. техн. наук : 05.13.18. Пенза, 2009.
89. Рябцев И. И. Метод совершенных операторов. Саратов : Изд-во Саратовского госуниверситета, 1978. 101 с.

References

1. Levin V.I. Regarding one problem of S. Ramanujan. *Uspekhi matematicheskikh nauk = Advances in mathematical sciences*. 1950;5(3):161–166. (In Russ.)
2. Levin V.I., Grosberg Yu.M. *Differentsial'nye uravneniya matematicheskoy fiziki = Differential equations of mathematical physics.* Moscow; Leningrad: Gostekhizdat, 1951:576. (In Russ.)
3. Levin V.I., Fuks B.A. *Funktsii kompleksnogo peremennogo i nekotorye ikh prilozheniya = Functions of a complex variable and some of their applications*. Moscow; Leningrad: Gostekhizdat, 1951:308. (In Russ.)
4. Levin V.I. The life and work of Indian mathematician S. Ramanujan. *Istoriko-matematicheskie issledovaniya = Historical and mathematical research*. Ed by G.F. Rybkin, A.P. Yushkevich. № 13. Moscow: GITTL, 1960:564. (In Russ.)
5. Levin V.I. *Ramanudzhan – matematicheskiy geniy Indii = Ramanujan - the mathematical genius of India.* Moscow: Znanie. 1968:48. (In Russ.)

6. Levin V.I. Victor Iosifovich Levin. Scientist, teacher, educational organizer. *Analiticheskie i chislennye metody modelirovaniya estestvenno-nauchnykh i so-tsial'nykh problem: sb. st. po materialam XVII Vseros. s mezhdunarodnym uchastiem nauch.-tekhn. konf. (Penza, Rossiya, 28 noyabrya – 3 dekabrya 2022 g.) = Analytical and numerical methods for modeling natural science and social issues: proceedings of the 17th All-Russian scientific and technical conference with onternational participation (Penza, Russia, November 28 – December 3, 2022).* Ed. by I.V. Boykov. Penza, 2022:190–195. (In Russ.)
7. Levin V.I. To the 100th anniversary of I.I. Eterman - a prominent teacher and scientist. *Matema-ticheskoe i komp'yuternoe modelirovanie estestvenno-nauchnykh i sotsial'nykh problem: materialy XV Mezhdunarodnoy nauch.-tekhn. konf. molodykh spetsialistov, aspirantov i studentov (Penza Rossiya, 1–4 iyunya 2021 g.) = Mathematical and computer modeling of natural science and social issues: proceedings of the 15th International scientific and technical conference of young scientists, postgraduate students and students (Penza, Russia, June 1-4, 2021).* Ed. by I.V. Boykov. Penza, 2021:233–239. (In Russ.)
8. Eterman I.I. *Asimptoticheskie metody v prikladnoy matematike = Asymptotic methods in applied mathematics*. Penza: Izd-vo PPI, 1973:264. (In Russ.)
9. Gribkova V.P. *Effektivnye metody ravnomernykh priblizheniy, osnovannye na polinomakh Chebysheva = Efficient uniform approximation methods based on Chebyshev polynomials.* Moscow: Izd-vo Sputnik+, 2017:194.
10. *Issledovaniya po teorii dinamicheskoy gravimetrii* = The research on the theory of dynamic gravimetry. Moscow: Institut fiziki Zemli AN SSSR, 1977:272. (In Russ.)
11. Babenko K.I. On some issues of approximation theory and numerical analysis. *Uspekhi matematicheskikh nauk = Advances in mathematical sciences*. 1985;40(1):3–28. (In Russ.)
12. Boykov I.V. Advances in mathematical sciences. *Optimal'nye metody vychisleniy i ikh primenenie: sb. Vyp. 8 = Optimal calculation methods and their application: Issue 8.* Penza: PPI, 1987:4–22. (In Russ.)
13. Boykov I.V. Approximation of some classes of functions by local splines. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki = Journal of computational mathematics and mathematical physics.* 1998;38(1):25–33. (In Russ.)
14. Boykov I.V. To the problem of K.I. Babenko on the asymptotics of the error in numerical solutions of elliptic equations. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Ser. Estestvennye nauki = University proceedings. Volga region. Series Natural sciences*. 2003;(6):3–29. (In Russ.)
15. Boykov I.V. *Optimal'nye metody priblizheniya funktsiy i vychisleniya integralov = Optimal methods for approximating functions and calculating integrals.* Penza: Izd-vo PGU, 2007:236. (In Russ.)
16. Babenko K.I. *Osnovy chislennogo analiza = Fundamentals of numerical analysis.* Moscow; Izhevsk: NITs Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika, 2002:848. (In Russ.)
17. Zakharova Yu.F. *Optimal methods for calculating multidimensional singular integrals and solving singular integral equations*. PhD abstract: 05.13.18. Saransk, 2004. (In Russ.)
18. Boykov I.V., Tynda A.N. Accuracy-optimal approximate methods for solving Volterra integral equations. *Differentsial'nye uravneniya = Differential equations.* 2002;(9):1215–1232. (In Russ.)
19. Boykov I.V. *Priblizhennoe reshenie singulyarnykh integral'nykh uravneniy = Approximate solution of singular integral equations.* Penza: Izd-vo PGU, 2004:316. (In Russ.)
20. Boykov I.V., Tynda A.N. Numerical methods of optimal accuracy for weakly singular Volterra integral equations. *Annals of Functional Analysis*. 2015;6(4):114–133. doi: 10.15352/afa/06-4-114
21. Aleksandrov P.S. (ed.). *Problemy Gil'berta = Hilbert's problems.* Moscow: Nauka, 1969:240. (In Russ.)

22. Kolmogorov A.N. On the representation of continuous functions of several variables by superpositions of functions of a smaller number of variables. *Doklady Akademii nauk SSSR = Reports of the Academy of Sciences of the USSR*. 1956;108:179–182. (In Russ.)
23. Arnol'd V.I. On functions of three variables. *Doklady Akademii nauk SSSR = Reports of the Academy of Sciences of the USSR*. 1957;114(4):679–681. (In Russ.)
24. Kolmogorov A.N. On the representation of continuous functions of several variables in the form of a superposition of continuous functions of one variable and addition. *Doklady Akademii nauk SSSR = Reports of the Academy of Sciences of the USSR*. 1957;114:953–956. (In Russ.)
25. Kolmogorov A.N. *Izbrannye trudy. Matematika i mekhanika = Selected works. Mathematics and mechanics.* Moscow: Nauka, 1985:470. (In Russ.)
26. Vitushkin A.G. Proof of the existence of analytic functions of several variables that cannot be represented by linear superpositions of continuously differentiable functions of a smaller number of variables. *Doklady Akademii nauk SSSR = Reports of the Academy of Sciences of the USSR.* 1964;156(6):1258–1261. (In Russ.)
27. Sprecher D.A. A Survey of Solved and Unsolved Problems on Superpositions of Functions. *Journal of Approximation Theory*. 1972;6:123–134.
28. Boykov I.V. On the Kolmogorov problem on the representation of analytic functions of several variables by superpositions of continuously differentiable functions of a smaller number of variables. *Vestnik OGGGGN RAN = Bulletin of the Department of Earth Sciences of RAS.* 2000;(3). (In Russ.).
29. Boikov I.V. Solution of Kolmogorov Problem and Representation of Analytical Functions of Many Variables by Superpositions of Continuously Differentiable Functions with Less Number of Variables. *Herald of the DGGGMS RAS*. 2000;(3). Available at: http://www.scgis.ru/russian/cp1251/h.dgggms/3-2000/boikovengl.htm..begin
30. Boykov I.V. On Kolmogorov's problem on the impossibility of representing analytic functions of several variables by superpositions of continuously differentiable functions of a smaller number of variables. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavede-niy. Povolzhskiy region. Ser. Estestvennye nauki = University proceedings. Volga region. Series Natural sciences*. 2002;(1):5–14. (In Russ.)
31. Gakhov F.D. *Kraevye zadachi = Boundary value problems*. Moscow: Nauka, 1963:640. (In Russ.)
32. Mikhlin S.G. *Mnogomernye singulyarnye integraly i integral'nye uravneniya = Multidimensional singular integrals and integral equations.* Moscow: Fizmatgiz, 1962:254. (In Russ.)
33. Boykov I.V., Rudenko A.K. *Ob optimal'nykh kvadraturnykh formulakh dlya vychisleniya singulyarnykh integralov: mezhvuz. sb. nauch. tr. Vyp. 1 = On optimal quadrature formulas for calculating singular integrals: interuniversity collected articles. Issue 1.* Penza: Izd-vo PPI, 1979:21–30. (In Russ.)
34. Boykov I.V. *Priblizhennye metody vychisleniya singulyarnykh i gipersingulyarnykh integralov. Ch. 1: Singulyarnye integraly = Approximate methods for calculating singular and hypersingular integrals. Part 1: Singular integrals.* Penza: Izd-vo PGU, 2005:360. (In Russ.)
35. Boykov I.V. *Optimal'nye po tochnosti algoritmy priblizhennogo vychisleniya singulyarnykh integralov = Accuracy-optimal algorithms for approximate calculation of singular integrals.* Saratov: Izd-vo Sarat. gos. un-ta, 1983:210. (In Russ.)
36. Boykov I.V., Boykova A.I., Ventsel E.S. Fundamental Solutions for Thick Sandwich Plate. *Engineering Analisis and Boundary Elements*. 2004;28:1437–1444.
37. Boykov I.V., Semov M.A. On one method for calculating hypersingular integrals. *Izvestiya vuzov. Matematika = University proceedings. Mathematics*. 2016;(3):3–17. (In Russ.)
38. Boykov I.V., Dobrynina N.F., Domnin L.N. *Priblizhennye metody vychisleniya integralov Adamara i resheniya gipersingulyarnykh integral'nykh uravneniy = Approximate*

methods for calculating Hadamard integrals and solving hypersingular integral equations. Penza: Izd-vo Penz GTU, 1996:188. (In Russ.)
39. Boykov I.V. Analytical and numerical methods for solving hypersingular integral equations. *Dinamicheskie sistemy = Dynamic systems*. 2019;9(3):244–272. (In Russ.)
40. Boykov I.V. Approximate Methods for Solving Hypersingular integral Equations / *Topics in Integral and Integro-Difference Equations. Theory and Applications* / ed. by Harenfra Singh, Hemen Dutta, Marcelo M. Cavalcanti. Springer, 2021:63–102.
41. Boykov I.V. On determining the stability regions of systems of differential equations with small parameters for derivatives. *Avtomatika i telemekhanika = Automation and telemechanics.* 1998;(6):88–96. (In Russ.)
42. Boykov I.V., Ryazantsev V.A. Turing stability of dynamical systems described by equations with fractional derivatives. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva = Journal of the Middle Volga Mathematical Society*. 2012;14(1):1–9. (In Russ.)
43. Boykov I.V., Ryazantsev V.A. Stability of solutions to parabolic equations with fractional derivatives. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences.* 2012;(4):84–100. (In Russ.)
44. Boykov I.V. On Brockett's stabilization problem. *Avtomatika i telemekhanika = Automation and telemechanics*. 2005;(5):76–82. (In Russ.)
45. Boykov I.V. *Ustoychivost' resheniy differentsial'nykh uravneniy = Stability of solutions to differential equations*. Penza: Izd-vo PGU, 2008:244. (In Russ.)
46. Boykov I.V. Stability of steady-state solutions of systems of nonlinear nonautonomous differential equations with delays. *Differentsial'nye uravneniya = Differential equations*. 2018;54(4):435–457. (In Russ.)
47. Boykov I.V., Roudnev V., Boykova A. Stability of Solutions to Systems of Nonlinear Differential Equations with Discontinuous Right-Hand Sides: Applications to Hopfield Artificial Neural Networks. *Mathematics*. 2022;10:1524. doi: 10.3390/math10091524
48. Boykov I.V. Stability of solutions to systems of parabolic equations with delays. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences.* 2023;(1):69–84. (In Russ.). doi: 10.21685/2072-3040- 2023-1-6
49. Eterman I.I. *Matematicheskie mashiny nepreryvnogo deystviya = Continuous mathematical machines.* Moscow: Mashgiz, 1957:236. (In Russ.)
50. Eterman I.I. *Analogue Computers*. New York: Pergamon press, 2005.
51. Levin V.I. To the 100th anniversary of V.A. Trakhtenbrot, an outstanding scientist and teacher. *Analiticheskie i chislennye metody modelirovaniya estestvenno-nauchnykh i sotsial'nykh problem: sb. st. po materialam XVII Vseros. s mezhdunarodnym uchastiem nauch.-tekhn. konf. (Penza, Rossiya, 1–4 dekabrya 2021 g.) = Analytical and numerical methods for modeling natural science and social issues: proceedings of the 17th All-Russian scientific and technical conference with international participation (Penza, Russia, December 1-4, 2021).* Ed. by I.V. Boykov. Penza, 2021:159–164. (In Russ.)
52. Trakhtenbrot B.A., Kobrinskiy N.E. *Vvedenie v teoriyu konechnykh avtomatov = Introduction to finite state machine theory.* Moscow: IFML, 1962:405. (In Russ.)
53. Boykov I.V., Rudnev V.A., Boykova A.I. Stability of Cohen–Grossberg neural networks with time-dependent delays. *Izvestiya vysshikh ucheb-nykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences.* 2023;(2):41–58. (In Russ.). doi: 10.21685/2072-3040-2023-2-5
54. Boykov I.V., Rudnev V.A., Boykova A.I. Approximate solution of mathematical physics problems using Hopfield neural networks. *Neyrokomp'yutery, razrabotka, primenenie = Neurocomputers, development, application*. 2013;(10):13–22. (In Russ.)

55. Boykov I.V., Baulina O.A. Approximate solution of integral equations using Hopfield neural networks. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva = Journal of the Middle Volga Mathematical Society.* 2013;15(1):41–51. (In Russ.)
56. Boykov I., Roudnev V., Boykova A. Approximate Methods for Solving Problems of Mathematical Physics on Neural Hopfield Networks. *Mathematics*. 2022;10. doi: 10.3390/math10132207
57. Alekhina M.A. Synthesis and complexity of reliable circuits in the $\{\vee, \bar{\ }\}$ basis for the same type of constant faults at the inputs of elements. *Diskretnaya matematika = Discrete mathematics.* 2003;15(1):98–109. (In Russ.)
58. Zakharova Yu.F., Kochneva A.A. Information security issues when using virtualization technology. *Matematicheskoe i komp'yuternoe modelirovanie estestvenno-nauchnykh i sotsial'nykh problem: materialy XV Mezhdunar. nauch.-tekhn. konf. molodykh spetsialistov, aspirantov i studentov Rossiya (Penza, 1–4 iyunya 2021 g.) = Mathematical and computer modeling of natural science and social issues: proceedings of the 15th International scientific and technical conference of young scientists, postgraduate students and students (Penza, Russia, June 1-4, 2021).* Ed. by I.V. Boykov. Penza, 2021:183–187. (In Russ.)
59. Zakharova Yu.F., Makarova S.E. Features of cryptographic algorithms based on multidimensional quadratic systems. *Matematicheskoe i kom-p'yuternoe modelirovanie estestvenno-nauchnykh i sotsial'nykh problem: mate-rialy XV Mezhdunar. nauch.-tekhn. konf. molodykh spetsialistov, aspirantov i studentov Rossiya (Penza, 1–4 iyunya 2021 g.) = Mathematical and computer modeling of natural science and social issues: proceedings of the 15th International scientific and technical conference of young scientists, postgraduate students and students (Penza, Russia, June 1-4, 2021).* Ed. by I.V. Boykov. Penza, 2021:193–198. (In Russ.)
60. Boykov I.V., Boykova A.I. Optimal methods for restoring potential fields. *Izvestiya RAN. Fizika Zemli = Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Physics of the Earth.* 1998;(8):70–78. (In Russ.)
61. Boykov I.V., Boykova A.I. Optimal methods for restoring potential fields.1. *Izvestiya RAN. Fizika Zemli = Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Physics of the Earth.* 2001;(1):78–89. (In Russ.)
62. Boykov I.V., Boykova A.I. Optimal methods for restoring potential fields. 2. *Izvestiya RAN. Fizika Zemli = Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Physics of the Earth.* 2003;(3):87–93. (In Russ.)
63. Boykov I.V., Boykova A.I. *Priblizhennye metody resheniya pryamykh i obratnykh zadach gravirazvedki = Approximate methods for solving direct and inverse problems of gravity exploration.* Penza: Izd-vo PGU, 2013:510. (In Russ.)
64. Boykov I.V., Ryazantsev V.A. On the issue of optimal approximation of geophysical fields. *Sibirskiy zhurnal vychislitel'noy matematiki = Siberian journal of computational mathematics*. 2021;24(1):17–34. (In Russ.)
65. Boykov I.V., Ryazantsev V.A. On the issue of simultaneous restoration of density and surface equation in the inverse problem of gravimetry for a contact surface. *Sibirskiy zhurnal vychislitel'noy matematiki = Siberian journal of computational mathematics*. 2020;(3):289–308. (In Russ.)
66. Boykov I.V., Ryazantsev V.A. On one approximate method for solving the inverse coefficient problem for the heat equation. *Sibirskiy zhurnal industrial'noy matematiki = Siberian journal of computational mathematics*. 2021;24(2):1–16. (In Russ.)
67. Boykov I.V., Ryazantsev V.A. On one approximate method for solving the inverse heat transfer problem. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2023;(2):31–40. (In Russ.). doi: 10.21685/2072-3040-2023-2-4
68. Boykov I.V., Ryazantsev V.A. On the problem of recovering boundary conditions in the third boundary value problem for parabolic equation. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings.*

Volga region. Physical and mathematical sciences. 2021;(2):3–13. doi: 10.21685/2072-3040-2021-2-1

69. Marchuk G.I. *Matematicheskie modeli v immunologii. Vychislitel'nye metody i eksperimenty = Mathematical models in immunology. Computational methods and experiments.* Moscow: Nauka, 1991;304. (In Russ.)
70. Boykov I.B., Zakharova Yu.F., Dmitrieva A.A. Stability of the simplest mathematical model of immunology. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences.* 2008;(4):32–46. (In Russ.)
71. Boykov I.B., Zakharova Yu.F., Dmitrieva A.A. Stability of antiviral and antibacterial immune response models. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2008;(4):47–57. (In Russ.)
72. Boykov I.V., Zakharova J.F., Dmitrieva A.A., Prostova N.V. Stability of mathematical models of immunology. *Analiticheskie i chislennye metody modelirovaniya estestvenno-nauchnykh i sotsial'nykh problem: sb. st. po materialam XII Vseros. s mezhdunarodnym uchastiem nauch.-tekhn. konf. (Penza, Rossiya, 4–6 dekabrya 2017 g.) = Analytical and numerical methods for modeling natural science and social issues: proceedings of the 12th All-Russian scientific and technical conference with international participation (Penza, Russia, December 4-6, 2017)*. Ed. by I.V. Boykov. Penza, 2017:87–108.
73. Glushkov V.M., Ivanov V.V., Yanenko V.M. *Modelirovanie razvivayushchikhsya sistem = Modeling evolving systems.* Moscow: Nauka, 1983:352. (In Russ.)
74. Baker C.T.H. A perspective on the numerical treatment of Volterra equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2000;125:217–249.
75. Boykov I.V., Tynda A.N. Approximate solution of nonlinear integral equations of the theory of developing systems. *Differentsial'nye uravneniya = Differential equations.* 2003;39(9):1214–1223. (In Russ.)
76. Tynda A.N. On one direct method for solving a system of nonlinear integral equations of two-sector economic models. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva = Journal of the Middle Volga Mathematical Society*. 2006;8(1):314–319. (In Russ.)
77. Tynda A.N., Noeiaghdam S., Sidorov D.N. Polynomial spline collocation method for solving weakly regular Volterra integral equations of the first kind. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*. 2022;39:62–79. doi: 10.26516/1997-7670.2022.39.62
78. Tynda A.N. Methods for numerical analysis of some integral dynamic systems with retarded arguments. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva = Journal of the Middle Volga Mathematical Society*. 2023;25(1):565–577. (In Russ.). doi: 10.15507/2079-6900.25.202301.565-577
79. Boykov I.V., Krivulin N.P. *Analiticheskie i chislennye metody identifikatsii dinamicheskikh system = Analytical and numerical methods for identifying dynamic systems.* Penza: Izd-vo PGU, 2016:398. (In Russ.)
80. Kalashnikov D.M. *Biometric voice identification of a person using a password voice phrase in high noise conditions*. PhD abstract: 05.13.01. Penza, 2017. (In Russ.)
81. Smirnov Yu.G. On the Fredholm property of a system of pseudodifferential equations in the problem of diffraction on a limited screen. *Differentsial'nye uravneniya = Differential equations.* 1992;28(1):136–143. (In Russ.)
82. Smirnov Yu.G. Method of Singular Integral. Operator-Functions for the Transmission Line Problem. *Electromagnetics*. 1993;14(2):145–156.
83. Smirnov Yu.G. On the solvability of vector itegrodifferential equations in the problem of diffraction of an electromagnetic field on screens of arbitrary shape. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki = Journal of computational mathematics and mathematical physics*. 1994;34(10):1461–1475. (In Russ.)

84. Il'inskiy A.S., Smirnov Yu.G. *Difraktsiya elektromagnitnykh voln na provodyashchikh tonkikh ekranakh = Diffraction of electromagnetic waves on conductive thin screens.* Moscow: Izdat. predpriyatie redaktsii zhurnala «Radiotekhnika», 1996:176. (In Russ.)
85. Boykov I.V., Aikashev P. To the numerical method for synthesis of fractal antennas. *2019 International Seminar on Electron Devices Design and Production (SED 2019). (Prague, Czech Republic 23–24 April 2019)*. Prague, 2019:119–125.
86. Boykov I.V., Aykashev P.V. Application of the continuous operator method to the solution of the Pocklington and Gallen equations for thin wire antennas. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2020;(3):131–150. (In Russ.). doi: 10.21685/2072-3040-2020-3-10
87. Romanova E. G. *Numerical modeling of electrodynamics and aerodynamics problems using singular integral equations*. PhD abstract: 05.13.18. Penza, 2007. (In Russ.)
88. Tarasov D. V. *Numerical research of models of electric vibrators described by hypersingular integral equations*. PhD abstract: 05.13.18. Penza, 2009. (In Russ.)
89. Ryabtsev I.I. *Metod sovershennykh operatorov = Perfect operator method*. Saratov: Izd-vo Saratovskogo gosuniversiteta, 1978:101. (In Russ.)

Информация об авторах / Information about the authors

Илья Владимирович Бойков
доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры высшей и прикладной математики, Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

Il'ya V. Boykov
Doctor of physical and mathematical sciences, professor, professor of the sub-department of higher and applied mathematics, Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, Russia)

E-mail: boikov@pnzgu.ru

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов / The author declares no conflicts of interests.

Поступила в редакцию / Received 01.10.2023

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 10.11.2023

Принята к публикации / Accepted 01.12.2023